Title	ベクトル値関数のミニマックス問題について(計画数学とその周辺)
Author(s)	田中, 環
Citation	数理解析研究所講究録 (1987), 611: 1-12
Issue Date	1987-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/99767
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
611巻 1987年 1-12

ベクトル値関数のミニマックス問題について

新潟大・理　田中　環　(Tamaki Tanaka)

実数値関数 f について、次の同値性はよく知られた事である。

$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ が鞍点 $(x_0, y_0) \in X \times Y$ を持つ。

$$\Longleftrightarrow \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x,y) = \max_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

もし、この関数 f がベクトル値だったら、どのような鞍点の定義をすると、これに類似した結果が得られるのかを考える。まず、$\mathbb{R}^n$ に半順序を決定する原点を頂点として含む acute な凸錐 Z_+ が与えられていて、ベクトル値関数 $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を考えることにします。ここで、Z_+ が acute であるとは、$\mathrm{cl} Z_+ \subset H \cup \{0\}$ となる開半空間 H が存在する時をいう。そして、ベクトル値関数に関する鞍点の概念を次のように定義する。

定義１　（錐鞍点 cone saddle point ）

点 $(x_0,y_0) \in X \times Y$ が f の Z_+ −鞍点であるとは、すべての $x \in X$ と $y \in Y$ について、

$$(1)\quad f(x_0,y) \not\geq f(x_0,y_0) \not\geq f(x,y_0)$$

が成り立つ時をいう。また、Z_+ −鞍点全体をＳで表す。ただし、$y_1 \geq y_2$ は $y_1 \in y_2 + Z_+$ を表し、そうでない時、$y_1 \not\geq y_2$ と書く。

これは、W.Rodder (1977)[8]の定義です。さらに、定義によって次の事柄がすぐ導かれる。

命題１

点 $(x_0,y_0) \in X \times Y$ が f の Z_+ −鞍点

$$\Longleftrightarrow (2)\quad f(x_0,y_0) \in \mathrm{Ext}[\, f(x_0,Y) \mid Z_- \,] \cap \mathrm{Ext}[\, f(X,y_0) \mid Z_+ \,]$$

ただし、ここで Ext[·|·]の記号は P.L. Yu の錐端点（ cone extreme points ）全体、つまり、Ext[A | C] は集合ＡのＣによって支配されない点全体を表す（ cf. [14] ）。また、（２）は Tanino and Sawaragi の Def. 5.2 [11]にもみられる事柄である。

さらに、ベクトル値関数に関するミニマックスとマックスミニを次のように定義する。

定義２（ベクトル値関数のミニマックス、マックスミニ）

各 $x \in X$ と $y \in Y$ について、

$$g(x) \triangleq \{\ z \in f(x,Y) \mid (\ z + \mathrm{ri}Z_+^0\ ) \cap f(x,Y) = \{z\}\ \}$$

$$h(y) \triangleq \{\ z \in f(X,y) \mid (\ z + \mathrm{ri}Z_-^0\ ) \cap f(X,y) = \{z\}\ \}$$

$$\underset{x\in X\ y\in Y}{\mathrm{minimax}}\ f(x,y) \triangleq \{\ z \in g(X) \mid (\ z + Z_-\ ) \cap g(X) = \{z\}\ \}$$

$$\underset{y\in Y\ x\in X}{\mathrm{maximin}}\ f(x,y) \triangleq \{\ z \in h(Y) \mid (\ z + Z_+\ ) \cap h(Y) = \{z\}\ \}$$

これは、Ext[・|・] を用いると、次のように書き換えられる。

(3)　$g(x) = \mathrm{Ext}[\ f(x,Y) \mid \mathrm{ri}Z_-^0\ ]$

(4)　$h(y) = \mathrm{Ext}[\ f(X,y) \mid \mathrm{ri}Z_+^0\ ]$

(5)　$\underset{x\in X\ y\in Y}{\mathrm{minimax}}\ f(x,y) = \mathrm{Ext}[\ g(X) \mid Z_+\ ]$

(6)　$\underset{y\in Y\ x\in X}{\mathrm{maximin}}\ f(x,y) = \mathrm{Ext}[\ h(Y) \mid Z_-\ ]$

この時、

$$\mathrm{Ext}[\ f(x_0,Y) \mid Z_-\ ] \subset \mathrm{Ext}[\ f(x_0,Y) \mid \mathrm{ri}Z_-^0\ ] = g(x_0)$$

$$\mathrm{Ext}[\ f(X,y_0) \mid Z_+\ ] \subset \mathrm{Ext}[\ f(X,y_0) \mid \mathrm{ri}Z_+^0\ ] = h(y_0)$$

という関係から、

定義3　(弱錐鞍点 weak cone saddle points)

点 $(x_0,y_0) \in X \times Y$ が f の弱 Z_+ ー鞍点であるとは、

(7)　$f(x_0,y_0) \in g(x_0) \cap h(y_0)$

が成り立つ時をいう。また、弱 Z_+ ー鞍点全体を S^W で表す。

このように定義すると、 $S \subset S^W$ が成り立ち、 $\mathrm{ri}Z_+^0 = Z_+$ の時、 $S = S^W$ が成り立つ（つまり、錐鞍点ならば弱錐鞍点である）。

また、$\mathrm{int}Z_+ \neq \phi$ の時、 X と Y が空でない <u>compact</u> 集合で、 f が<u>連続</u>ならば、 g : X → P(f(X,Y))と h : Y → P(f(X,Y)) は上半連続なコンパクト写像となる(cf. [6] and [13])。従って、 g(X), h(Y) はコンパクト集合となり、また、(３)－(６)に Yu の Cor. 4.6 [14] を適用すると、 $g(X) \neq \phi$, $h(Y) \neq \phi$, $\underset{x \in X}{\mathrm{mini}}\underset{y \in Y}{\mathrm{max}}\ f(x,y) \neq \phi$, $\underset{y \in Y}{\mathrm{maxi}}\underset{x \in X}{\mathrm{min}}\ f(x,y) \neq \phi$ とが得られる。さらに、$\mathrm{int}Z_+ = \phi$ であっても、 $\mathrm{ri}Z_+ \neq \phi$ なので、 Z_+ を含むアフィン部分空間 [Z_+] 上で同様の議論をすれば、$\underset{x \in X}{\mathrm{mini}}\underset{y \in Y}{\mathrm{max}}\ f(x,y) \neq \phi$, $\underset{y \in Y}{\mathrm{maxi}}\underset{x \in X}{\mathrm{min}}\ f(x,y) \neq \phi$ は保証される。さて、次に(弱)錐鞍点はどんな時、存在するのかを考える。 まず、 Simons の coincidence 定理 (cf. [9]) を用いると、

<u>定理１</u> ($\mathrm{int}Z_+ \neq \phi$ でなくてもよい)

X と Y がある２つの Hausdorff 局所凸空間の空でない <u>compact</u> <u>convex</u> 部分集合とする。 $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が各 $x \in X$ と $y \in Y$ について

(８) $\{ y \in Y \mid f(x,y) \in g(x) \}$
(９) $\{ x \in X \mid f(x,y) \in h(y) \}$
空でない <u>convex</u>

(１０) $\{ y \in Y \mid f(x,y) \in h(y) \}$
(１１) $\{ x \in X \mid f(x,y) \in g(x) \}$
<u>open</u>

$\Longrightarrow$ f は少なくとも１つ弱 Z_+ －鞍点を持つ。更に、
$riZ_+^0 = Z_+$ の時、 f は Z_+ －鞍点を持つ。

又、 Browder の coincidence 定理を用いると（cf. [1] and [9] ）、

<u>定理２</u> （$intZ_+ \neq \phi$ でなくてもよい）

ＸとＹがある２つの Hausdorff 局所凸空間の空でない <u>compact</u> <u>convex</u> 部分集合とする。 $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が各 $x \in X$ と $y \in Y$ について

（１２）$\{ y \in Y \mid f(x,y) \in g(x) \}$
（１３）$\{ x \in X \mid f(x,y) \in h(y) \}$
空でない <u>closed</u>, <u>convex</u>

（１４）$\{ (x,y) \in X \times Y \mid f(x,y) \in g(x) \}$
（１５）$\{ (x,y) \in X \times Y \mid f(x,y) \in h(y) \}$
<u>closed</u> in$X \times Y$

$\Longrightarrow$ f は少なくとも１つ弱 Z_+ －鞍点を持つ。更に、
$riZ_+^0 = Z_+$ の時、 f は Z_+ －鞍点を持つ。

<u>証明</u> 各 $x \in X$ と $y \in Y$ について

$T(x) = \{ y \in Y \mid f(x,y) \in g(x) \}$

$U(y) = \{ x \in X \mid f(x,y) \in h(y) \}$

と置くと、仮定より T、 U は上半連続な空でない closed convex-valued map となる事がわかり、 Browder の coincidence 定理により、 $y_0 \in T(x_0)$, $x_0 \in U(y_0)$

となる$(x_0,y_0) \in X \times Y$が存在する事がわかる。したがって、これから、(7)式が成り立つ。よって、fは少なくとも1つ弱 Z_+ー鞍点 $(x_0,y_0) \in X \times Y$を持つ。

さらに、この系として、連続関数についての存在定理を述べる事ができる。

<u>系 1</u>

XとYがある2つの Hausdorff 局所凸空間の空でない <u>compact</u> <u>convex</u> 部分集合とする。また、$\mathrm{int}Z_+ \neq \phi$ とする。

$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が連続で各 $x \in X$ と $y \in Y$ について(12)と(13)がともに convex

$\Longrightarrow$ fは少なくとも1つ弱 Z_+ー鞍点を持つ。更に、$riZ^0_+ = Z_+$ の時、f は Z_+ー鞍点を持つ。

<u>証明</u> 仮定より g と h が上半連続なコンパクト写像となり、fが連続なので(12)と(13)の閉性は明らかである。また、$g(x) \neq \phi$, $h(y) \neq \phi$ なので空でないこともわかる。さらに、(14)と(15)式の閉性も同様にして得られる。よって、定理2により、fは少なくとも1つ弱 Z_+ー鞍点を持つ。

しかし、定理1、2の仮定を満足する連続関数は具体的によくわからない。そこで、次のような具体的な関数について考えることにする。この場合、弱 Z_+ー鞍点でなく Z_+ー

鞍点の存在性がいえる。

定理３

ＸとＹがある２つの Hausdorff t.v.s. の空でない compact 部分集合とする。 $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が

（１６） $f(x,y) = u(x) + v(y)$

となる２つの連続関数 u と v の和である時、

$\Longrightarrow$ f は少なくとも１つ Z_+－鞍点を持つ。
更に、$S^W \neq \phi$ で、

（１７） $\displaystyle \min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y) = \mathrm{Ext}[\ V^W \mid Z_+\ ]$

（１８） $\displaystyle \max_{y\in Y}\min_{x\in X} f(x,y) = \mathrm{Ext}[\ V^W \mid Z_-\ ]$

が成り立つ。 ただし、 V^W は弱 Z_+ －鞍点値全体を表す。

証明 （１６）より、すぐに $S = A_0 \times B_0$ ただし、

$$A_0 = \{\ x \in X \mid u(x) \in \mathrm{Ext}[\ u(X) \mid Z_+\ ]\ \}$$

$$B_0 = \{\ y \in Y \mid v(y) \in \mathrm{Ext}[\ v(Y) \mid Z_-\ ]\ \}$$

であることがわかる。よって、 $S^W \neq \phi$ 。また、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}[\ V^W \mid Z_+\ ] \\
&= \mathrm{Ext}[\ \mathrm{Ext}[\ u(X) \mid \mathrm{ri}Z^0_+\ ] + \mathrm{ri}Z^0_+ + \mathrm{Ext}[\ v(Y) \mid \mathrm{ri}Z^0_-\ ] \mid Z_+\ ] \\
&= \mathrm{Ext}[\ u(X) + \mathrm{ri}Z^0_+ + \mathrm{Ext}[\ v(Y) \mid \mathrm{ri}Z^0_-\ ] \mid Z_+\ ] \\
&= \mathrm{Ext}[\ u(X) + \mathrm{Ext}[\ v(Y) \mid \mathrm{ri}Z^0_-\ ] \mid Z_+\ ] \\
&= \min_{x\in X}\max_{y\in Y} f(x,y)
\end{aligned}$$

となり、（１７）が得られる。（１８）も同様である。

さて、最初の話題に戻って、ベクトル値関数 f が（弱）錐鞍点を持つとしたら、どのような関係が成立するのか考える。

定理４

X と Y がある２つの Hausdorff t.v.s. の空でない compact 部分集合とする。 $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が弱 Z_+－鞍点 $(x_0, y_0) \in X \times Y$ を持つとする。ただし、Z_+ は

$$(19) \quad (Z_+ \setminus \{0\}) + \mathrm{cl}Z_+ \subset Z_+$$

を満たすとする。

$$(20) \quad f(x_0, y_0) \in \underset{x \in X}{\mathrm{minimax}} \ \underset{y \in Y}{} f(x,y) + Z_+$$

$$(21) \quad f(x_0, y_0) \in \underset{y \in Y}{\mathrm{maximin}} \ \underset{x \in X}{} f(x,y) + Z_-$$

従って、

$$(22) \quad V^W \subset \left(\underset{x \in X \ y \in Y}{\mathrm{minimax}} f(x,y) + Z_+ \right) \cap \left(\underset{y \in Y \ x \in X}{\mathrm{maximin}} f(x,y) + Z_- \right)$$

よって、

$$(23) \quad \exists \ z_1 \in \underset{x \in X \ y \in Y}{\mathrm{minimax}} f(x,y), \ z_2 \in \underset{y \in Y \ x \in X}{\mathrm{maximin}} f(x,y)$$

$$\text{s.t.} \quad z_1 \leq f(x_0, y_0) \leq z_2$$

証明　$\mathrm{int}Z_+ \neq \phi$ の場合の証明を付けておく（$\mathrm{int}Z_+ = \phi$ の場合は［ 13 ］の Th. 4.3 を見よ）。仮定より g(X) が空でないコンパクト集合なので、［ 12 ］の Cor. 3.1 により

$$g(X) + Z_+ = \mathrm{Ext}[\, g(X) \mid Z_+ \,] + Z_+ = \underset{x \in X \ y \in Y}{\mathrm{minimax}} f(x,y) + Z_+$$

同様にして、

$$h(Y) + Z_- = \max_{y \in Y}\min_{x \in X} f(x,y) + Z_-$$

この時、fは弱 Z_+－鞍点$(x_0,y_0) \in X \times Y$を持つので、（７）が成り立ち、

$$f(x_0,y_0) \in \left(g(X) + Z_+ \right) \cap \left(h(Y) + Z_- \right)$$

となって、（２０）が得られる。同様にすれば、（２１）－（２３）は明らか。

最後に、これらをまとめると次のようになる。

<u>定理５</u>

XとYがある２つの Hausdorff t.v.s. の空でない <u>compact</u> 部分集合とする。$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が

（１６） $f(x,y) = u(x) + v(y)$

となる２つの<u>連続関数</u> u と v の和である時で、Z_+ は

（２４） $\mathrm{ri}Z_+^0 = Z_+$

を満たすとする。

$\Longrightarrow$

（ａ） fは少なくとも１つ Z_+－鞍点を持つ。（定理３）

（ｂ） $\min_{x \in X}\max_{y \in Y} f(x,y) = \mathrm{Ext}[\ V \mid Z_+\ ]$

$\max_{y \in Y}\min_{x \in X} f(x,y) = \mathrm{Ext}[\ V \mid Z_-\ ]$ （定理３）

（ｃ） $V \subset \min_{x \in X}\max_{y \in Y} f(x,y) + Z_+$

$V \subset \max_{y \in Y}\min_{x \in X} f(x,y) + Z_-$ （定理４）

(d) $$\mathop{\mathrm{minimax}}\limits_{x\in X\ y\in Y} f(x,y) \subset \mathop{\mathrm{maximin}}\limits_{y\in Y\ x\in X} f(x,y) + Z_-$$

$$\mathop{\mathrm{maximin}}\limits_{y\in Y\ x\in X} f(x,y) \subset \mathop{\mathrm{minimax}}\limits_{x\in X\ y\in Y} f(x,y) + Z_+$$

ただし、 V は Z_+ー鞍点値全体を表す。

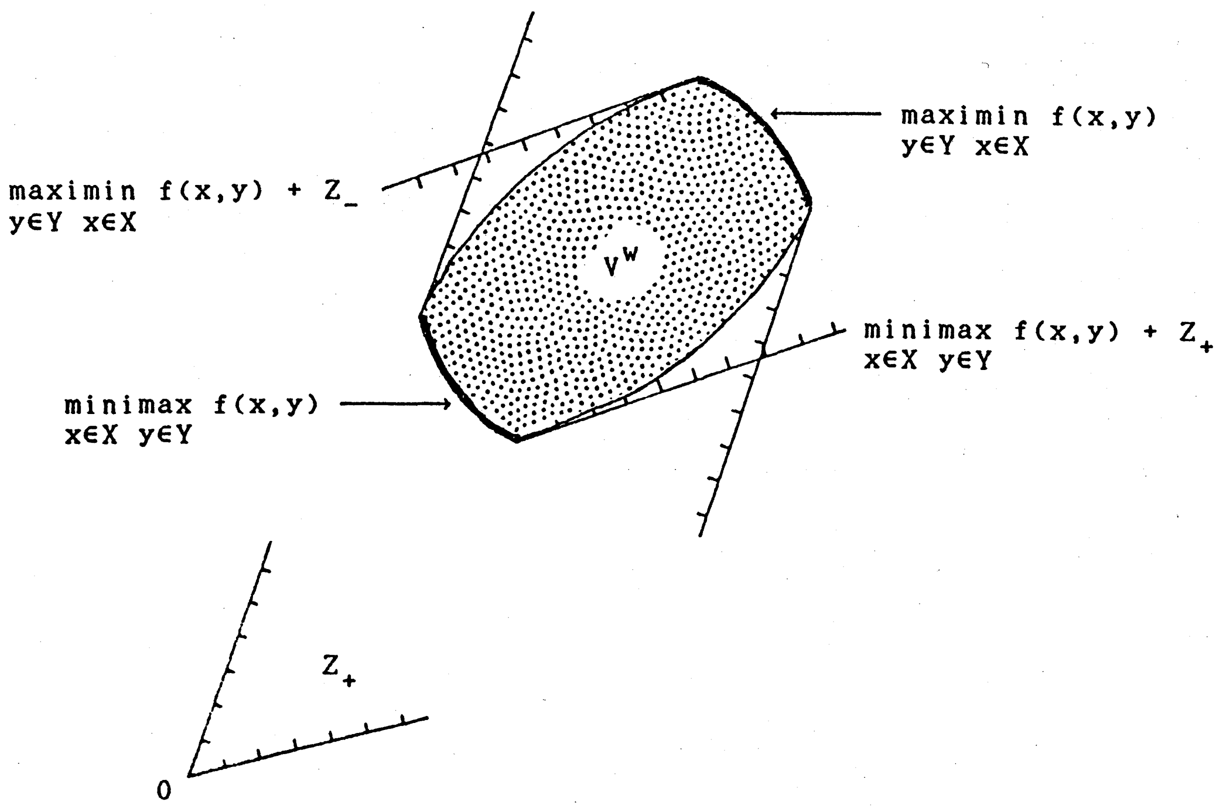
<u>証明</u>　(d)だけを示す。(b)により

$$\mathop{\mathrm{minimax}}\limits_{x\in X\ y\in Y} f(x,y) = \mathrm{Ext}[\ V \mid Z_+\ ] \subset V$$

$$\mathop{\mathrm{maximin}}\limits_{y\in Y\ x\in X} f(x,y) = \mathrm{Ext}[\ V \mid Z_-\ ] \subset V$$

が成り立ち、(c)により(d)は明らかに成り立つ。

次の Figure 1. は定理5の主張を解釈する事に役立つであろう。



<u>Figure 1.</u>　$\mathrm{ri}Z_+^0 = Z_+$ の時
$V^w = V$.

References

[1] F.E.Browder, Coincidence theorems, minimax theorems and variational inequalities, Contemporary Math., Vol.**26** (1984), 67-80.

[2] I.Ekeland and R.Temam, "Convex Analysis and Variational Problems", North-Holland, Amsterdam, 1976.

[3] K.Fan, Some properties of convex sets related to fixed point theorem, Math. Ann., Vol.**266** (1984), 519-537.

[4] R.Hartley, On cone-efficiency, cone-convexity, and cone-compactness, SIAM J. Appl. Math. Vol.**34** (1978), 211-222.

[5] M.I.Henig, Existence and characterization of efficient decisions with respect to cones, Math. Progr. Vol.**23** (1982), 111-116.

[6] J.W.Nieuwenhuis, Some minimax theorems in vector-valued functions, J.Optimization Theory Appl. Vol.**40** (1983), 463-475.

[7] R.T.Rockafellar, "Convex Analysis", Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1970.

[8] W.Rödder, A generalized saddle-point theory: Its application to duality theory for linear vector optimum problems, European J. Operational Res. Vol.**1** (1977), 55-59.

[9] S.Simons, Cyclical coincidences of multivalued maps, J. Math. Soc. Japan, Vol.**38** (1986), 515-525.

[10] T.Tanino and Y.Sawaragi, Duality theory in multiobjective programming, J. Optimization Theory Appl. **27** (1979), 509-529.

[11] T.Tanino and Y.Sawaragi, Conjugate maps and duality in multiobjective optimization, J. Optimization Theory Appl. Vol.**31** (1980), 473-499.

[12] T.Tanaka, On cone-extreme points in $\mathbb{R}^n$, to appear in Science Reports of Niigata University, Vol.**23** (1987).

[13] T.Tanaka, Some minimax problems of vector-valued functions, submitted.

[14] P.L.Yu, Cone convexity, cone extreme points, and non-dominated solutions in decision problems with multi-objectives, J. Optimization Theory Appl. Vol.**14** (1974), 319-377.